Métodos de análisis no lineal en la solución
de ecuaciones diferenciales parciales
Gabriel López Garza

Resumen.

Introduciremos un mínimo de temas de Análisis Funcional, por ejemplo, el teorema de representación de Riesz, que nos permitirán el estudio de: i) la teoría de grado de Leray-Shauder; ii) teoremas tipo minimax de Rabinowitz.

Los temas serán tratados desde un punto de vista elemental y serán motivados como una generalización de problemas de cálculo diferencial en R^N, a problemas de cálculo variacional en dimensión infinita.

No se requiere el conocimiento previo de las ecuaciones diferenciales parciales ni del Análisis Funcional, pero si, un curso básico de Análisis Matemático.

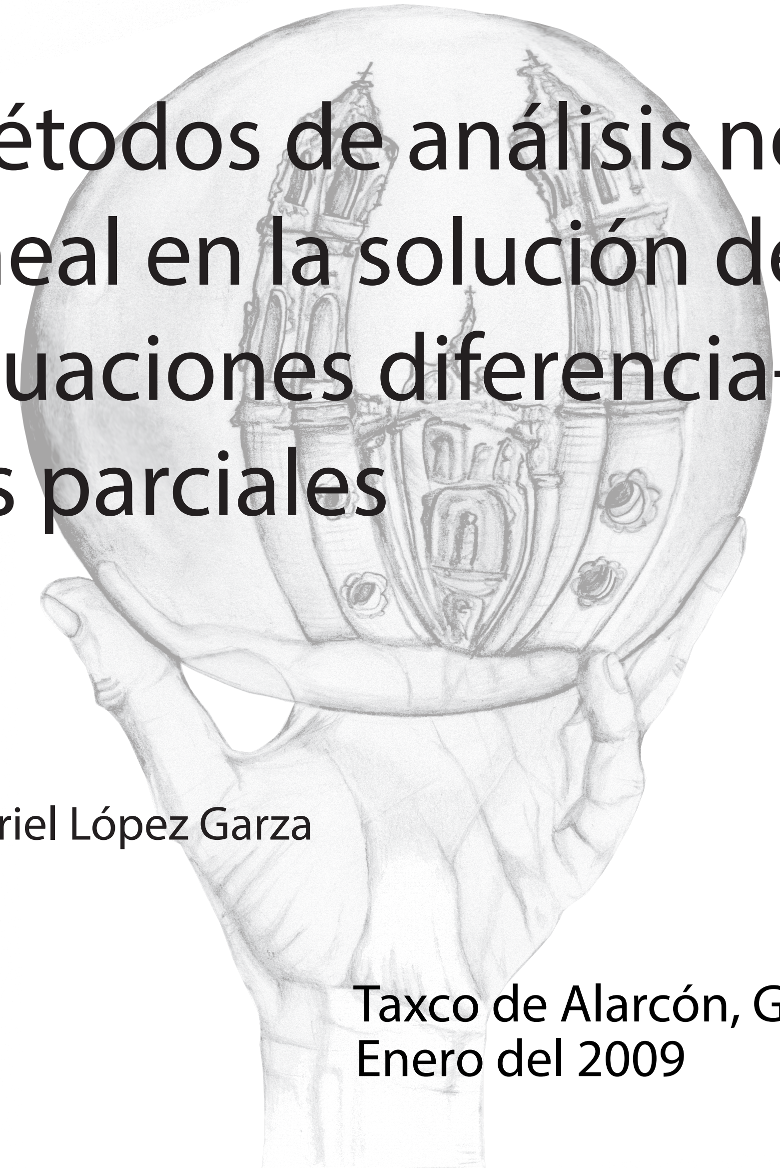
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

2° Coloquio
del Departamento de Matemáticas

División de
Ciencias
Básicas e
Ingenieria

Lorem ipsum

Métodos de análisis no lineal en la solución de ecuaciones diferenciales parciales



Gabriel López Garza

Taxco de Alarcón, Guerrero
Enero del 2009

2^{do} Coloquio del Departamento de Matemáticas

Métodos de análisis en la solución de ecuaciones diferenciales parciales

Gabriel López Garza

Casa abierta al tiempo

Comité Organizador

Mario Pineda Ruelas
Roberto Quezada Batalla
Blanca Rosa Pérez Salvador
Luis Aguirre Castillo
Daniel Espinosa
Constancio Hernández García
Michaell Rivera Arce (Apoyo logístico)

Material didáctico del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa con el apoyo del Programa Integral de Fortalecimiento Institucional 3.3 (PIFI).

Métodos de análisis en la solución de ecuaciones diferenciales parciales

Gabriel López Garza

Departamento de Matemáticas, UAM-I

Casa abierta al tiempo

Universidad Autónoma Metropolitana

Índice general

Capítulo 1

Introducción o de cómo los grandes matemáticos también se equivocan

1.1. Algunas ideas básicas

Consideramos la ecuación de Laplace, en un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con frontera suave $\partial\Omega$. Si φ es una función continua definida sobre $\partial\Omega$, se trata de encontrar una función $u = u(x),\ x \in \mathbb{R}^3$ que satisfaga

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \text{ en } \Omega \\ \quad u = \varphi, & x \text{ en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ es el laplaciano de u.

Como era sabido por, Gauss, Kelvin y Dirichlet si se pone

$$J(v) = \iiint_\Omega |\nabla v(x)|^2 dV,$$

$$K_o := \{v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) : v = \varphi,\ x \in \partial\Omega\},$$

donde $\nabla v = (v_x, v_y, v_z)$, y se encuentra una función $u \in K_o$ tal que

$$J(u) \leqslant J(v) \text{ para cualquier } v \in K_o, \tag{1.2}$$

entonces u es solución de (1.1). Efectivamente, para todo $w \in \mathcal{C}_c^2(\Omega)$, donde $\mathcal{C}_c^2(\Omega) = \{w \in \mathcal{C}^2 : \exists K,\ \text{compacto},\ K \subset \Omega \text{ y } w \equiv 0,\ \text{en } K^c\}$ y todo $t > 0$, se tiene $u \pm tw \in K_o$ (dado que $w \equiv 0$ en $\partial\Omega$, por definición) y

$$\begin{aligned} J(u) &\leqslant J(u \pm tw) && \text{por (1.2)} \\ &= J(u) \pm 2t \iiint_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) dV + t^2 J(w). \end{aligned}$$

de donde

$$0 \leqslant \pm \iiint_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) dV + tJ(w)$$

Tomando límite cuando $t \to 0$

$$0 \leqslant \pm \iiint_\Omega \nabla u \cdot \nabla w$$

Después de integrar por partes

$$0 = \iiint_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla w(x) dV = -\iiint_{\Omega} \Delta u(x) \cdot w(x) dV$$

lo cual se obtiene mediante la fórmula de Green:

$$\iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w = \iint_{\partial\Omega} w \frac{du}{\partial n} ds - \iiint_{\Omega} w \Delta u dV$$

notamos que la fórmula se cumple para toda $w \in C_c^2(\Omega)$. Se concluye que

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega$$

dado que además $u \in K_o$ entonces $u = \varphi$ en $\partial\Omega$, por lo tanto, u es solución de (1.1).

El hecho de que se pueda resolver (1.1) por el procedimiento anterior fue utilizado por Riemann quien lo llamó principio de Dirichlet y la función J lleva el nombre de la integral de Dirichlet.

Weierstrass objetó tal procedimiento. Observó que si bien es cierto que la cota inferior

$$\alpha = \inf_{v \in K_o} J(v)$$

es un real positivo o nulo. No es claro porque tal número debe alcanzarse. De otra forma: No es evidente que una sucesión minimizante $(u_n) \subset K_o$ i.e. tal que $u_n \in K_o$ y $J(u_n) \to \alpha$ converja dentro de K_o, ¡ni tampoco que tal sucesión sea acotada en $C^2(\bar{\Omega})$!

Efectivamente, la mayor dificultad es demostrar que la cota inferior se alcanza i.e. que α es un mínimo del funcional.

Weierstras fue más allá, encontró un ejemplo que no admite solución como mínimo de un funcional y retó a sus contemporáneos para encontrar una función continuamente diferenciable $u : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ que minimizara la integral

$$I(u) = \int_{-1}^{1} \left| x \, \frac{d}{dx} \, u \right|^2 dx$$

sujeta por ejemplo a las condiciones iniciales

$$u(\pm 1) = \pm 1$$

Weierstrass fue capaz de demostrar que el ínfimo de I (Ver [**4**]) es 0, sin embargo el valor 0 nunca es alcanzado. De acuerdo con Struwe [**5**], la crítica de Weierstrass del principio Dirichlet produjo una Grundlagenkrise comparable a la crisis de la teoría de conjuntos y lógica después de las antinomias de Russel en la Teoría de conjuntos de Cantor o el Teorema de incompletez de Gödel.

Sin embargo, gracias a los esfuerzos de Weierstrass, Arzelá, Fréchet, Hilbert y Lebesgue entre otros, el cálculo de variaciones continuó avanzando con renovado vigor para constituirse hasta la fecha en una de las herramientas principales en la solución de de ecuaciones diferenciales parciales.

En estas notas trataremos de formalizar el procedimiento de Weierstrass para resolver el problema (1.1) y dar las bases para entender, cuando se pueden garantizar la existencia de mínimos de ciertos funcionales por medio de diferentes técnicas. Este curso está pensado para estudiantes de licenciatura quienes comprendan los elementos básicos de un curso avanzado de cálculo diferencial e integral, donde se incluyen los conceptos de compacidad en $\mathbb{R}^N$, así como los elementos del álgebra lineal.

Capítulo 2

Encontrando mínimos de funcionales sin usar derivadas

2.1. Introducción

Dado el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & x \in \Omega \\ u = \varphi & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

En la sección anterior se construyó un funcional

$$J(u) = \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, d\bar{x}$$

es decir una correspondencia $J : C^2(\Omega) \to K$ que asocia a cada $u \in C^2(\Omega)$ en número real para cada $w \in C_c^2(\Omega)$. Obsérvese que el funcional para estar bien definido requiere sólo $u \in C^1(\Omega)$, mientras que el laplaciano requiere que u sea al menos dos veces derivable. Este asunto es característico en la solución de problemas por métodos variacionales y volveremos a tratarlo más adelante. La idea es minimizar el funcional J sobre el conjunto

$$K_o = \{u \in C^2(\bar{\Omega}) : v = \varphi, \ x \in \partial\Omega\}$$

es decir sobre el conjunto de funciones que satisfacen la condición de frontera $u = \varphi$ con $x \in \partial\Omega$.

¡El problema fue la falta de compacidad, en general, de tal conjunto K_o!

Antes de seguir adelante, recordemos los resultados básicos de existencia de máximos y mínimos para funciones $f : K \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continuas.

TEOREMA 2.1.1. *Si f es continua en un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^N$ entonces $f : K \to \mathbb{R}$ alcanza un máximo y un mínimo en K, i.e.*

$$\exists u_{0,1} \in K \text{ such that } f(u_0) \leqslant f(u) \text{ y } f(u_1) \geqslant f(u) \quad \forall u \in K$$

El hecho de que K sea compacto garantiza la existencia de sucesiones minimizantes en K (y maximizantes respectivamente) que converjan al mínimo $u_0 \in K$. Es claro que si K no es compacto una función no tiene por que alcanzar el mínimo en K.

Ejemplo. Sea $J(x) = e^x$ y $K = (-\infty, 0]$. Claramente el mínimo de J el cual es 0 no se alcanza en K.

Cabe preguntarse: ?'Existen teoremas que garanticen la existencia de mínimos (o máximos) si K no es compacto, si f no es continua? Antes de responder esta pregunta analizaremos el siguiente ejemplo.
Ejemplo. Sea

$$J(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ & \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad x \in [-1, 1]$$

claramente J no alcanza el mínimo en $[-1, 1]$.

Quizá resulte curioso el siguiente Teorema, el cual garantiza la existencia de mínimos de funciones en general, el cual esclarecerá lo que ocurre en los ejemplos anteriores.

TEOREMA 2.1.2. *Suponga que* $J : K \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup +\infty$ *satisface la condición de compacidad acotada*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ el conjunto } K_\alpha = \{u \in K : J(u) \leqslant \alpha\} \tag{2.1}$$

es compacto.

Entonces J es uniformemente acotado por abajo en K y alcanza su mínimo en K.

NOTA 2.1.3. Obsérvese que compacto en $\mathbb{R}^N$ es equivalente a secuencialmente compacto y que esto no sucede en espacios topológicos en general.
• Notar que el Teorema no requiere explícitamente que J sea continuo. Por ejemplo garantiza la existencia de un mínimo para funciones escalón con imagen acotada.
• Notar que no se requiere que J sea lineal.

Demostración del Teorema 2.1.2. Si (2.1) se cumple. Supongamos que $J \not\equiv \infty$. Sea $\alpha_0 = \inf\limits_K J \geqslant -\infty$ y sea (α_m) una sucesión estrictamente decreciente tal que

$$\alpha_m \to \alpha_0 \qquad \text{si} \qquad m \to \infty$$

Sea $K_m = K_{\alpha_m}$. Por hipótesis cada K_m es compacto y no vacío, además $K_m \supset K_{m+1}$ $\forall m$. Por compacidad de K_m existe $u \in \bigcap\limits_{m \in \mathbb{N}} K_m$ que satisface

$$J(u) \leqslant \alpha_m \qquad \forall m \geqslant m_0.$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$

$$J(u) \leqslant \alpha_0 = \inf_K J.$$

$\square$

Como nuestro interés es tratar con espacios más complejos que $\mathbb{R}$ se tiene la siguiente reformulación del teorema anterior.

TEOREMA 2.1.4. *Sea M un espacio topológico Hausdorff y suponga que $J : M \to \mathbb{R} \cup +\infty$ satisface*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad K_\alpha = \{u \in M : J(u) \leq \alpha\} \tag{2.2}$$

es compacto (Heine-Borel).

Entonces J es uniformemente acotado por abajo en M y alcanza su mínimo en M. La conclusión sigue siendo válida si en lugar de (2.2) suponemos que cada K_α es secuencialmente compacto. $\square$

Observación. Si $J : M \to \mathbb{R}$ satisface (2.2) entonces $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{u \in M : J(u) > \alpha\} = M \setminus K_\alpha$ es abierto. Se dice entonces que J es semicontinuo por abajo, respectivamente, si cada K_α es secuencialmente compacto entonces J es secuencialmente continuo por abajo. Recíprocamente si J es semicontinuo por abajo para algún $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$ entonces $K_{\bar{\alpha}}$ es compacto. Así K_α será compacto para toda $\alpha \leqslant \bar{\alpha}$ y la conclusión del Teorema seguirá siendo válida.

Nota: La conclusión de semicontinuidad por abajo se puede alcanzar más fácilmente en la topología más fina en M. Por contraste la condición de compacidad de los subconjuntos de nivel K_α, $\alpha \in \mathbb{R}$ requiere topologías menos finas y las dos condiciones compiten en cierta manera.

En la práctica hay muchos espacios de Sobolev con una topología débil en la cual las dos condiciones se satisfacen simultáneamente.

Sin embargo (Ver [**5**]) hay ejemplos interesantes en los que (2.2) no se puede satisfacer en ninguna topología razonable.

En algunas condiciones el siguiente teorema, el cual es un caso especial del Teorema 2.1.4, puede ser mas fácilmente verificado.

TEOREMA 2.1.5. *Suponga que V es un espacio de Banach reflexivo con norma $\|\cdot\|$ y sea $M \subset V$ un conjunto débilmente cerrado de V. Sea $J : M \to \mathbb{R} \bigcup +\infty$ coercitivo en M con respecto a V, es decir,*

(1) *$J(u) \to \infty$ cuando $\|u\| \to \infty,\ u \in M$*
(2) *$\forall u \in M$ cualquier sucesión (u_m) en M tal que*

$$u_m \rightharpoonup u \text{ débilmente en } V$$

se cumple $J(u) \leqslant \liminf_{m\to\infty} J(u_m)$.

Entonces J es acotado por abajo y alcanza su mínimo en M.

La demostración del Teorema 2.1.5 se hará en la sección 3. Debemos mencionar que con este teorema podemos resolver incluso un problema aparentemente más complejo que (1.1), el cual incluye al p-laplaciano:

TEOREMA 2.1.6. *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, $p \in [2, \infty)$ con exponente conjugado q (recordar que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) Sea $f \in H^{-1,q}(\Omega)$ el dual de $H_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces existe una solución débil $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ del problema de valores frontera*

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = f &\quad \text{en } \Omega \\ u = 0 &\quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

es decir u satisface la ecuación.

$$\int \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi - f\varphi\right) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

2.2. Llevando el problema a otro universo

En esta parte consideramos un problema más sencillo que el Teorema 2.1.6 de la sección anterior. Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto abierto y acotado con $\partial\Omega$ suave (para comenzar suficientemente suave para aplicar el Teorema de Green) $N \geqslant 3$, y f en algún espacio apropiado por determinar. Plantearemos primero el problema de Poisson:

Existe u tal que

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \quad \text{EDP} \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \quad \text{CF} \end{cases}$$

En principio se requiere $u \in C^2(\bar{\Omega})$ (debido al laplaciano). Supongamos para fijar ideas que $f \in C^0(\bar{\Omega})$

Multiplicando la ecuación diferencial parcial por una función φ cualquiera que se anule en la frontera, precisando, el espacio más apropiado para las funciones φ es $C_c^1(\Omega)$, es decir el espacio de funciones con primera derivada continua y soporte compacto en Ω donde el soporte K de una función φ se define como la cerradura del conjunto

$$K = \{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}.$$

Así multiplicando la EDP por $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ e integrando obtenemos

$$-\int_\Omega (\Delta u)\varphi = \int_\Omega f\varphi$$

por la fórmula de Green

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega f \cdot \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega). \tag{2.3}$$

Diremos que u es una solución débil del problema de Poisson si u satisface (2.3) $\forall\varphi \in C_c^1(\Omega)$

Obsérvese que la integral $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi$ define un producto escalar en el espacio de funciones $C^1(\Omega)$:

$$\langle u, \varphi\rangle := \int \nabla u \cdot \nabla\varphi$$

puede verificarse fácilmente que el producto es bilineal, etcétera, es decir, que tiene todas las propiedades de un producto interior (se recomienda como ejercicio para el estudiante).

Por otra parte, la integral

$$\int_\Omega f\varphi$$

define un funcional lineal

$$\Lambda_f : C^1(\bar{\Omega}) \to \mathbb{R}, \qquad \Lambda_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi$$

Visto de esta forma, el problema de existencia de soluciones para el problema (P) puede expresarse como:

Existe u en algún espacio apropiado, por determinar, con producto interior tal que

$$\langle u, \varphi\rangle = \Lambda_f(\varphi), \quad \forall\varphi \in C_c^1(\Omega)$$

para que el problema tenga sentido se requiere tener un espacio apropiado que sea completo.

Se define: $H_0^1(\Omega)$ como la completación de $C_c^1(\Omega)$ con respecto a la norma

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2},$$

nuestro nuevo universo. Notamos que Λ_f es continuo en $H_0^1(\Omega)$.

Efectivamente

$$\begin{aligned} |\Lambda_f(\varphi)| = \left|\int_\Omega f\varphi\right| &\leqslant \left(\int_\Omega f^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \varphi^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant C\|\varphi\|_{L^2} \leqslant C_1\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Donde la última desigualdad se cumple por el teorema de Rellich-Kondrachov. La existencia de soluciones se sigue del siguiente teorema.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Representación de Riesz). *Si H es un espacio de Hilbert y $F : H \to \mathbb{R}$ es lineal y continuo entonces $\exists u! \in H$ tal que*

$$\langle u, v\rangle_H = F(v) \qquad \forall v \in H.$$

Así la existencia de soluciones del problema de Poisson queda resuelto al trasladarse a un espacio de Hilbert donde se puede aplicar el Teorema de Riesz, el problema queda resuelto al llevar el problema a un nuevo universo.

Requerimos para formalizar los resultados de las secciones anteriores de las herramientas del análisis funcional:

a) Espacios de Banach y de Hilbert.
b) Convergencia Débil.
c) Convergencia Fuerte.
d) Teorema de representación de Riesz.
e) Dualidad de espacios.
f) Teorema de Hann-Banach.

Además requerimos de las herramientas de teoría de ecuaciones diferenciales parciales:

a) Espacios de Sobolev.
b) Desigualdad de Poincaré.
c) Teorema de Arzelá-Ascoli.
d) Teorema de Rellich-Kondrachov.

Capítulo 3

Herramientas básicas para sobrevivir el curso.

3.1. Teoremas básicos del Análisis Funcional

En está sección nos limitamos a enunciar y comentar los teoremas necesarios y sólo demostraremos el teorema de representación de Riesz así como el Teorema 2.1.5. Los conceptos más básicos son los de operador lineal y funcional lineal los cuales introducimos a continuación.

Definición 3.1.1. Sean X, Y espacios vectoriales definidos sobre el mismo campo $\mathbb{K}$. Una correspondencia $A : X \to Y$ se denomina operador lineal si se cumple la siguiente propiedad

$A(x + \alpha y) = A(x) + \alpha A(y)$ para toda $x, y \in X$ y toda $\alpha \in \mathbb{K}$.

La colección de todos los operadores de X en Y se denota por $L(X, Y)$. Si $Y = \mathbb{R}$ al operador lineal se le llama funcional lineal.

Introducimos ahora el imprescindible concepto de espacio métrico.

Definición 3.1.2. Un espacio métrico es un conjunto X con una función real (métrica) $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ tal que

i) $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
ii) $x, y \in X \Longrightarrow \rho(x, y) = \rho(y, x)$.
iii) $x, y, z \in X \Longrightarrow \rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Si ρ es una métrica en X entonces

$$B(x, r) := \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$$

es llamada *bola abierta* centrada en x con radio r. Un conjunto abierto en un espacio métrico es un conjunto $\mathcal{G} \subset X$ con la siguiente propiedad.

$$\forall x \in \mathcal{G}\ \exists \delta > 0 \text{ t.q. } B(x; \delta) \subset \mathcal{G}.$$

Puede demostrarse que un espacio métrico con la anterior definición de conjunto abierto es un espacio topológico.

Un conjunto $\mathcal{F}$ de un espacio topológico se llama cerrado si $X \setminus \mathcal{F}$ es abierto. Si $\mathcal{A} \subset X$, la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a $\mathcal{A}$ se llama cerradura de $\mathcal{A}$ y se denota por $\bar{\mathcal{A}}$.

La *frontera* $\partial\mathcal{A}$ de $\mathcal{A}$ se define como

$$\partial\mathcal{A} := \overline{\mathcal{A}} \cap \overline{X \setminus \mathcal{A}}.$$

Una noción imprescindible para este curso es la de compacidad

DEFINICIÓN 3.1.3. Un espacio topológico X se dice compacto si para toda familia $\{\mathcal{G}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ tal que $X = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{G}_\gamma$ existe un subconjunto finito $\mathcal{K} \subset \Gamma$ tal que

$$X = \bigcup_{\gamma\in\mathcal{K}} \mathcal{G}_\gamma.$$

Cualquier subconjunto $\mathcal{A}$ de un espacio topológico X es en sí mismo un espacio topológico con los conjuntos abiertos $\{(\mathcal{G} \cap \mathcal{A}) : \mathcal{G}$ es abierto en $X\}$. Un conjunto $\mathcal{A}$ se dice compacto en X si $\mathcal{A}$ es un espacio topológico compacto con la topología inducida. Finalmente, $\mathcal{A} \subset X$ se dice relativamente compacto si $\overline{A}$ es compacto.

Se tiene otra definición más apropiada para los analistas.

DEFINICIÓN 3.1.4. Un espacio topológico X se dice secuencialmente compacto si toda sucesión $(x_n) \subset X$ tiene una subsucesión convergente a un punto $x \in X$.

NOTA 3.1.5. Hay espacios topológicos que no son secuencialmente compactos pero son compactos y viceversa. En los espacios $\mathbb{R}^N$ ambas nociones son equivalentes.

Se tiene la siguiente caracterización para los espacios métricos.

TEOREMA 3.1.6. *Sea X un espacio métrico. Entonces $\mathcal{A} \subset X$ es relativamente compacto si y sólo si toda sucesión $(x_n) \subset \mathcal{A}$ posee una subsucesión convergente.*

Una importante propiedad de los espacios compactos es la siguiente

TEOREMA 3.1.7. *Sea X un espacio compacto o secuencialmente compacto y sea f una función continua en X. entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que*

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2) \text{ para toda } x \in X.$$

Una sucesión (x_n) de elementos de un espacio métrico X se dice de Cauchy si $\forall\varepsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ para todo $m, n > n_o$. Un espacio métrico X se llama *completo* si toda sucesión de Cauchy converge a un elemento $x \in X$.

Introducimos la definición de *espacio de Banach,* pero antes necesitamos la definición de norma.

DEFINICIÓN 3.1.8. Sea X un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una función $\|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}$ se llama norma en X si tiene las siguientes propiedades:

- $\|x\|_X = 0 \iff x = 0 \in X$
- $\|\alpha x\|_X = |\alpha|\ \|x\|\ \ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ x \in X$
- $\|x + y\|_X \leqslant \|x\|_X + \|y\|_X$

Un espacio X con una norma definida en él se llama espacio normado.

Claramente $\rho(x, y) := \|x - y\|$ es una métrica en X.

DEFINICIÓN 3.1.9. Un espacio normado completo se llama espacio de Banach.

Cualquier espacio métrico puede ser encajado como conjunto denso en un espacio métrico completo. Se tiene un resultado más fuerte.

TEOREMA 3.1.10. *Para cada espacio normado X existe un espacio de Banach $\tilde{X}$ llamado completación de X y una inyección lineal $L : X \to \tilde{X}$ tal que* $\mathrm{Im}L$ *es un conjunto denso en $\tilde{X}$ y $\|x\|_X = \|L(x)\|_X$ para todo $x \in X$.*

Ejemplo. Sea T un espacio topológico compacto. Puede demostrarse que cualquier función real continua es acotada en T. Entonces tiene sentido la definición:

$$\|f\|_T := \sup\{|f(x)| : x \in T\}.$$

Se denota con $C(T)$ al espacio de tales funciones. Convergencia en este espacio de una sucesión es convergencia uniforme en T.

Uno de los resultados más importantes relativos a los espacios de funciones continuas es el Teorema de Arzelá-Ascoli, el cual requiere de la siguiente definición

DEFINICIÓN 3.1.11. Una familia $\mathcal{F} \subset C(T)$ se dice equicontinua si para todo $x \in T$ y $\varepsilon > 0$ existe una vecindad $\mathcal{U}$ de x tal que

$$y \in \mathcal{U},\quad f \in \mathcal{F} \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

TEOREMA 3.1.12 (Arzelá-Ascoli). *Sea T un espacio topológico el cual es la unión de una sucesión de conjuntos abiertos relativamente compactos. Entonces $\mathcal{F} \subset C(T)$ es relativamente compacto en la métrica ρ si y sólo si las dos siguientes condiciones son satisfechas:*

i) *$\mathcal{F}$ es equicontinua.*
ii) *Para cada $x \in T$ el conjunto $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{C}$.)*

Para una demostración se puede consultar [**3**]. Ahora comenzamos a explorar las diferencias menos obvias entre espacios de dimensión finita y los espacios de dimensión infinita.

TEOREMA 3.1.13. *Sea X un espacio vectorial normado.Entonces la bola cerrada* $\overline{B(\bar{0};1)} := \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ *es un conjunto compacto en la topología inducida por la norma si y sólo si X es de dimensión finita.*

Ejemplo. Sea Ω un conjunto medible según Lebesgue de $\mathbb{R}^N$ y denotamos por dx la medida de Lebesgue. Para $p \in [1, \infty)$ se denota

$$\mathcal{L}^p(\Omega) : \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ \text{medibles } : |f|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

Claramente $\mathcal{L}^p(\Omega)$ es un espacio vectorial. Notamos que $|f|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = 0$ implica que $f = 0$ sólo en un conjunto de medida de Lebesgue cero, por lo que no determina una norma.

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \right)^{1/p}.$$

Para obtener una norma se toma

$$N(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f = 0 \text{ c.d.s. en } \Omega\}.$$

entonces $N(\Omega)$ es un subespacio de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ por lo cual podemos formar el espacio factor

$$L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega)|_N,$$

el cual es un espacio vectorial de clases de equivalencia con norma

$$\|[f]\|_{L^p(\Omega)} := |f|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} \quad \forall f \in [f].$$

Por simplicidad se omite la notación $[f]$. Se conocen los siguientes hechos.

TEOREMA 3.1.14. $L^p(\Omega)$ *es un espacio de Banach para* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

TEOREMA 3.1.15 (Desigualdad de Hölder). *Si* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *y* p' *llamado conjugado de p satisface* $1/p + 1/p' = 1$ *y* $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ *entonces* $fg \in L^1(\Omega)$ *y se tiene*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Continuamos con la definición de espacios de Hilbert, pero antes definimos la función producto interior.

DEFINICIÓN 3.1.16. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una correspondencia $\langle \cdot, \cdot \rangle_X : X \times X \to \mathbb{R}$ se denomina producto interior en X si se cumplen las siguientes propiedades:

i) Para cada $y \in X$ la correspondencia $x \mapsto \langle x, y \rangle_X$ es lineal.
ii) $\langle x, y \rangle_X = \langle y, x \rangle_X$ para todo $x, y \in X$.
iii) $\langle x, x \rangle_X \geqslant 0$ para toda $x \in X$ y $\langle x, x \rangle_X = 0$ si y sólo si $x = 0 \in X$.

Se cumple la siguiente proposición

Proposición. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ un producto definido en un espacio vectorial X. Entonces

i) Para todo $x, y \in X$ se cumple la desigualdad de Schwarz:

$$|\langle x, y\rangle_X| \leqslant \langle x, x\rangle_X \langle y, y\rangle_X .$$

ii) La correspondencia $\|\cdot\| : x \mapsto |\langle x, x\rangle_X|^{1/2}$ es una norma en X.

Llegamos así al importante concepto de espacio de Hilbert.

DEFINICIÓN 3.1.17 (Espacio de Hilbert). Un espacio vectorial con producto interior y norma inducida por el producto interior, completo respecto de esta norma se denomina espacio de Hilbert.

Usualmente los espacios de Hilbert se denotan con la letra H.

Finalmente, enunciamos y demostramos el teorema de representación de Riesz.

TEOREMA 3.1.18 (Teorema de Representación de Riesz). *Si H es un espacio de Hilbert y $F : H \to \mathbb{R}$ es lineal y continuo entonces $\exists u! \in H$ tal que*

$$\langle u, v\rangle_H = F(v) \qquad \forall v \in H.$$

Más aún, $\|F\| = \|u\|$.

Demostración. Si $F \equiv 0$ entonces $u \equiv 0$ y no queda nada por demostrar. Supongamos $F \not\equiv 0$. No es difícil demostrar que

$$H = \text{Ker } F \oplus (\text{Ker } F)^{\perp}.$$

Escoja $x_0 \in (\text{Ker } F)^{\perp}$, $\|x_0\| = 1$ y pongamos $u = \alpha x_0$ donde α es un número por determinar. Cualquir $v \in H$ puede escribirse como $v = y + \beta x_0$, $y \in \text{Ker } F$, $\beta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\langle u, v\rangle = \beta\alpha, \qquad F(v) = \beta F(x_0).$$

Si ponemos $\alpha = F(x_0)$ tenemos $\langle u, v\rangle_H = F(v)$

Si hay otro $w \in H$ tal que $F(v) = \langle w, v\rangle_H$ entonces

$$\langle v, u - w\rangle_H = 0, \ \forall v \in H.$$

Por lo tanto $u = w$. Para la última parte, por la desigualdad de Schwarz

$$|F(v)| = |\langle v, u\rangle| \leqslant \|v\|\|u\| \qquad \text{i.e.} \qquad \|F\| \leqslant \|u\|.$$

Además $F(u) = \|u\|^2$ implica $\|F\| \geqslant \|u\|$ con lo que queda terminada la demostración. $\square$

Terminamos esta sección introduciendo los conceptos de convergencia débil.

Se denota con $\mathcal{L}(X, Y)$ el espacio de todos los operadores lineales continuos del espacio normado X en el espacio normado Y. Observe que $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio vectorial normado con la norma

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup\{\|Ax\|_Y : \|x\|_X \leqslant 1\}.$$

Tenemos que

TEOREMA 3.1.19. *Sea Y un espacio de Banach. Entonces $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio de Banach también. En particular el espacio dual X^* de todos los funcionales lineales en X es un espacio completo.*

Finalmente, introducimos el concepto de convergencia débil, el cual es esencial para la siguiente sección.

DEFINICIÓN 3.1.20. Sea (x_n) una sucesión en un espacio normado X. Decimos que (x_n) converge débilmente a $x \in X$, lo que denotamos como $x_n \rightharpoonup x$ o bien $w - \lim_{n\to\infty} x_n = x$ si

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \qquad \text{para todo} \qquad f \in X^*.$$

el teorema básico más importante relativo a la convergencia débil es el siguiente.

TEOREMA 3.1.21. *Para la convergencia débil se cumplen las siguientes propiedades:*

i) *Unicidad. Si $x_n \rightharpoonup x$ y $x_n \rightharpoonup y$ entonces $x = y$.*
ii) *Si $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ entonces $x_n \rightharpoonup x$.*
iii) *Una sucesión que converge débilmente es acotada y además, si $x_n \rightharpoonup x$, entonces*

$$\|x\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Dado que X^* es un espacio vectorial normado su dual está definido $(X^*)^* = X^{**}$. Poniendo

$$k(x) : f \to f(x), \qquad f \in X^*$$

entonces k es una correspondencia lineal de X a X^{**} y

$$\|k(x)\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\|_{X^*}\leqslant 1} = \|x\|_X.$$

A la correspondencia k se le llama correspondencia canónica.

DEFINICIÓN 3.1.22. Un espacio de Banach se llama reflexivo si la llamada correspondencia canónica $k : X \to X^{**}$ es sobreyectiva.

Ejemplo. Todos los espacio de Hilbert y todos los $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ son reflexivos. Los espacios $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ y $C(\Omega)$ no son reflexivos.

3.1.1. Demostración del Teorema 2.1.5. Con las herramientas de esta sección podemos ahora demostrar el Teorema 2.1.5:

Teorema 2.1.5 *Suponga que V es un espacio de Banach reflexivo con norma $\|\cdot\|$ y sea $M \subset V$ un conjunto débilmente cerrado de V. Sea $J : M \to \mathbb{R} \cup +\infty$ coercitivo en M con respecto a V, es decir,*

(1) $J(u) \to \infty$ *cuando* $\|u\| \to \infty$, $u \in M$

(2) $\forall u \in M$ *cualquier sucesión* (u_m) *en* M *tal que*

$$u_m \rightharpoonup u \text{ débilmente en } V$$

se cumple $J(u) \leqslant \liminf_{m\to\infty} J(u_m)$*.*

Entonces J *es acotado por abajo y alcanza su mínimo en* M*.*

Demostración. Sea $\alpha_0 = \inf_M J$ y sea (u_m) una sucesión minimizante en M, es decir, la cual satisface $J(u_m) \to \alpha_0$. Dado que J es coercitivo (u_m) es acotada en V. Como V es reflexivo, por el teorema de Eberlein-Smulian (enunciado más abajo), existe una subsucesión de (u_n) la cual denotaremos de la misma forma que la sucesión original la cual $u_n \rightharpoonup u$ para alguna $u \in .V$ Pero M es débilmente cerrado, por lo tanto $u \in M$. Finalmente por semicontinuidad débil por abajo

$$J(u) \leqslant \liminf_{m\to\infty} J(u_m) = \alpha_0.$$

□

TEOREMA 3.1.23 (Eberlein-Smulian). *Un espacio de Banach* X *es reflexivo si y sólo si toda sucesión acotada contiene una subsucesión que converge débilmente en* X*.*

Capítulo 4

Resolviendo problemas con derivadas

4.1. Introducción

Por medio de las derivadas de funcionales pueden resolverse problemas más complejos que los vistos hasta ahora, por ejemplo

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u) \text{ en } \Omega \\ \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

con $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua (Caratheodory), por ejemplo, $|g(x,s)| \leqslant c|s| + c_2(x)$ con $\int_\Omega c_2^2 dx < \infty$ un ejemplo más concreto es $g(x,s) = \lambda s + f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\Omega)$. Por una solución de (4.1) entenderemos una solución débil, es decir, una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega g(x,u)\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \tag{4.2}$$

Antes de intentar resolver el problema más general, se debe resolver el caso ya tratado $g(x,s) = \lambda s + f(x)$ con $\lambda = 0$, $f \in L^2(\Omega)$ y resuelto por medio del teorema de Riesz, con la finalidad de ilustrar las ideas que sustentan el método de puntos críticos. Definimos primero el funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega fu \tag{4.3}$$

4.2. Derivadas débiles

Antes de proseguir introducimos los espacios más generales donde pueden resolverse los problemas de este curso, nos referimos a los espacios de Sobolev de derivadas débiles $W^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$. El espacio $W^{1,2}(\Omega)$ es el espacio de funciones $L^2(\Omega)$ las cuales tienen derivada débil en $L^2(\Omega)$, es decir, el conjunto de funciones u tales que existe $v \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v\varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Se dice que v es la derivada débil (L^2) de u y se denota por $v := \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$. Por extensión se denota

$$\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$$

el vector en $\mathbb{R}^N$ formado por las derivadas débiles de u, de aquí en adelante, ∇u denotará esto.

Se define el espacio $W^{1,2}(\Omega)$ como el espacio de Banach de funciones con derivadas débiles en L^2 con la norma

$$\|u\|_{1,2} = \left\{ \int_\Omega u^2 + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right\}^{1/2}$$

Nota. Debe remarcarse que $H_0^1(\Omega)$ tiene norma dada por $\|u\| := \left(|\nabla u|^2\right)^{1/2}$ para toda $u \in H_0^1(\Omega)$, la cual es equivalente a la norma $\|\cdot\|_{1,2}$ dada la desigualded de Poincaré

$$c \int_\Omega u^2 dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Ejemplo. (Probar como ejercicio) Sea $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ la función

$$u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$$

pertenece a $W^{1,2}(\Omega)$ y tiene por derivada débil la función Heavyside H dada por

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < x < 0. \end{cases}$$

Nota. Generalmente la palabra "débil" tiene un sentido peyorativo, no es el caso en este sentido técnico, la derivada débil debe entenderse como una generalización de la derivada el cual permite estudiar una gran cantidad de fenómenos los cuales no pueden ser entendidos con la derivada clásica, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ahora podemos demostrar algunos hechos básicos acerca del funcional J.

LEMA 4.2.1. *El funcional J definido en (4.3) es continuo en $H_0^1(\Omega)$.*

Demostración. Tenemos las siguientes estimaciones

$$\begin{aligned} J(u_1) - J(u_2) &= \frac{1}{2}(\|u_1\|^2 - \|u_2\|^2) - \langle f, u_1 - u_2 \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \frac{1}{2}(\|u_1\| - \|u_2\|)(\|u_1\| + \|u_2\|) + \|f\|_{L^2(\Omega)} C \|u_1 - u_2\| \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{u_1\to u_2} |J(u_1) - J(u_2)| = 0.$$

dado que $\|\cdot\|$ es continua. □

Por otra parte J es diferenciable en un sentido especial

TEOREMA 4.2.2. *J tiene derivada de Frechét continua dada por*

$$J'(u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Omega fv, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

es decir,

$$\lim_{\substack{v\to 0 \\ en\, H_0^1(\Omega)}} \frac{|J(u+v) - J(u) - J'(u)v|}{\|v\|} = 0,$$

además $J'(u)v$ es un funcional lineal acotado.

NOTA 4.2.3. Debemos subrayar que $J'(u) \in H_0^1(\Omega)^*$, el espacio de funcionales lineales acotados de $H_0^1(\Omega)$ en $\mathbb{R}$.

Demostración. Claramente

$$J'(u)(v_1 + cv_2) = J'(u)v_1 + cJ'(u)(v_2),$$

es decir, el funcional es lineal. Por otra parte

$$\begin{aligned} |J'(u)v| &\leqslant \left|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\right| + |\langle f, v\rangle_{L^2}| \\ &\leqslant \|u\|\|v\| + \|f\|_{L^2} C\|v\| \\ &\leqslant C\|v\|. \end{aligned}$$

Ahora demostramos que $J'(u)v$ es la derivada de Frechét.

$$\begin{aligned} J(u+v) - J(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u+v)|^2 - \int_\Omega f(u+v) - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega fu \\ &= J'(u)v + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \end{aligned}$$

así $|J(u+v) - J(u) - J'(u)v| = 1/2\|v\|^2$ y

$$\lim_{\substack{v\to 0 \\ \text{en } H_0^1(\Omega)}} \frac{|J(u+v) - J(u) - J'(u)v|}{\|v\|} = \lim_{\|v\|\to 0} \frac{1}{2}\|v\| = 0.$$

Finalmente, $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Necesitamos demostrar que

$$\lim_{u\to u_0} \|J'(u) - J'(u_0)\|_{op} = 0,$$

donde

$$\|\Lambda\|_{op} = \sup_{v\in H_0^1(\Omega)} \frac{|\Lambda(v)|}{\|v\|}.$$

Tenemos

$$\begin{aligned}(J'(u) - J'(u_0))(v) &= \int_\Omega \nabla(u-u_0)\cdot\nabla v \\ &\leqslant \|u-u_0\|\|v\|.\end{aligned}$$

Así

$$\frac{|(J'(u) - J'(u_0)(v)|}{\|u\|} \leqslant \|u-u_0\|, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

□

Obtenemos de esta forma la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.2.4. Se dice que $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ es un punto crítico de $J \in C^1$ si y sólo si $J'(u_0)v = 0$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

NOTA 4.2.5. De esta forma u es un punto crítico de J si y sólo si

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Omega fv = 0$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$ lo cual ocurre si y sólo si u es una solución débil de (4.1). con $g(x,s) = f(x) \in L^2(\Omega)$.

Similarmente a lo que ocurre en cálculo ordinario y dado que no es difícil demostrar que también para funcionales se cumple el teorema de Fermat (si J es derivable y tiene un mínimo en un punto interior u entonces u es un punto crítico de J) se tiene el siguiente teorema:

TEOREMA 4.2.6. *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *y* $f \in L^2(\Omega)$ *entonces el funcional*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega fu, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

tiene un mínimo en $H_0^1(\Omega)$.

NOTA 4.2.7. Con lo que se ha argumentado arriba, por supuesto, el Teorema 4.2.6 demuestra que el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ en } \Omega \\ \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.4}$$

tiene una solución débil.

Demostración. Primero demostramos que J es acotado por abajo y coercitivo, es decir que $J(u) \to \infty$ si $\|u\| \to \infty$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega fu &\leqslant \left|\int_\Omega fu\right| \leqslant \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \\ &\leqslant c\|f\|_{L^2}\|u\|\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} J(u) &\geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2 - c\|f\|_{L^2}\|u\| \\ &= \frac{1}{2}(\|u\| - c\|f\|_{L^2})^2 - c^2\|f\|^2 \\ &\geqslant -c\|f\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\inf\limits_{u\in H_0^1(\Omega)} J(u) \in \mathbb{R}$. Además la primera desigualdad en la secuencia anterior demuestra que el funcional es coercitivo.

Seguidamente, obtenemos una sucesión minimizante, es decir, una sucesión $(v_m) \subset H_2^1(\Omega)$, tal que

$$\inf_{v\in H_0^1(\Omega)} J(v) \leqslant J(v_m) \leqslant \inf_{v\in H_0^1(\Omega)} J(v) + \frac{1}{m}.$$

De esta forma

$$\lim_{m\to\infty} J(v_m) = \inf_{v\in H_0^1(\Omega)} J(v).$$

Idea: Ahora si podemos intentar demostrar que existe una subsucesión (v_{m_k}) tal que $v_{m_k} \to u \in H_0^1(\Omega)$ en algún sentido para después tratar de demostrar que

$$J(u) = \inf_{v\in H_0^1(\Omega)} J(v).$$

en la dirección de la idea anterior demostramos que (v_m) es acotada. Si no lo es, existe (v_{m_k}) tal que $v_{m_k} \to \infty$ si $k \to \infty$. Entonces

$$J(v_{m_k}) \geqslant \frac{1}{2}\|v_{m_k}\|^2 - c\|f\|^2\|v_{m_k}\| \to \infty$$

si $k \to \infty$. Por otra parte,

$$J(v_{m_k}) \to \inf_{v\in H_0^1(\Omega)} J(v) \in \mathbb{R},$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto (v_m) es acotada. Ahora dado que $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert y por lo tanto reflexivo por el teorema de Eberlein-Smulian, dado que (v_m) es acotada, tiene una subsucesión la cual converge débilmente a algún $u \in H_0^1(\Omega)$, es decir,

$$\lim_{k\to\infty} \langle v_{m_k}, w\rangle = \langle u, w\rangle\,,\ \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

lo cual se denota por $v_{m_k} \rightharpoonup u$ y se lee: (v_{m_k}) converge débilmente a u en $H_0^1(\Omega)$.

Queda por demostrar que $J(u) = \inf_{v\in H_0^1(\Omega)} J(v)$, lo cual se sigue del hecho de que J es débilmente semicontinuo por abajo, es decir: si $v_m \rightharpoonup v$ en $H_0^1(\Omega)$ entonces $\liminf_{m\to\infty} J(v_m) \geqslant J(u)$. Ya que entonces

$$\liminf_{k\to\infty} J(v_k) \geqslant J(u)$$

y entonces $\inf_{v\in H_0^1(\Omega)} J(v) \geqslant J(u)$ por lo que concluimos que

$$J(u) = \inf_{v\in H_0^1(\Omega)} J(v).$$

Queda por demostrar que J es débilmente semicontinua por abajo. Recordamos que

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega fu, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Primero demostramos que $u \mapsto \|u\|$ es débilmente semicontinuo por abajo, es decir, si $u_m \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$ entonces $\liminf_{m\to\infty} \|u_m\| \geqslant \|u\|$.

Si $f \in H_0^1(\Omega)^*$ entonces $\lim_{m\to\infty} f(u_m) = f(u)$. Además $|f(u_m)| \leqslant \|f\|\|u_m\|$ de esta forma

$$\frac{f(u)}{\|f\|} \leqslant \|u_m\|$$

así

$$\frac{|f(u)|}{\|f\|} \leqslant \liminf_{m\to\infty} \|u_m\|, \quad \forall f \in H_0^1(\Omega)^*.$$

Por lo tanto

$$\sup_{f\in H_0^1(\Omega)^*} \frac{|f(u)|}{\|f\|} \geqslant \liminf_{m\to\infty} \|u_m\|.$$

Como consecuencia del teorema de Hann-Banach

$$\|u\| = \sup_{f\in H_0^1(\Omega)^*} \frac{|f(u)|}{\|f\|},$$

de donde se obtiene

$$\|u\| \leqslant \|u_m\|$$

que es lo que se quería demostrar. Lo siguiente es demostrar que $u \mapsto \displaystyle\int_\Omega fu$ es débilmente continua, es decir, si $u_m \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$ entonces $\int_\Omega fu_m \to \int_\Omega fu$. Para demostrar esto usamos el encajamiento compacto

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

dado por le teorema de Rellich-Kondrachov. Por lo tanto $u_m \to u$ fuertemente en $L^2(\Omega)$ y como convergencia fuerte implica convergencia débil, tenemos

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega fu_m = \int_\Omega fu.$$

Con lo anterior y el Teorema 2.1.5 queda terminada la demostración. □

Falta sólo por enunciar el teorema de Rellich-Kondrachov.

Teorema 4.2.8 (Rellich-Kondrachov). *Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera Lipschitz.*

i) *Sea $k < N/p$ y sea $q \in [1, p^*)$ donde*
$$p^* := \frac{Np}{N - kp}.$$
Entonces el encajamiento $W^{k,p}(\Omega)$ en $L^q(\Omega)$ es compacto.

ii) *Si $k = N/p$, entonces el encajamiento del inciso anterior es compacto para todo $q \in [1, \infty)$.*

iii) *Si $k > N/p$, entonces $W^{k,p}(\Omega) \subset\subset C(\overline{\Omega})$.*

Podemos ahora demostrar el teorema referente al p-laplaciano

Teorema 2.1.6. *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, $p \in [2, \infty)$ con exponente conjugado q ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Sea $f \in H^{-1,q}(\Omega)$ el dual de $H_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces existe una solución débil $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ del problema de valores frontera*
$$\begin{array}{rl} -\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{array}$$
es decir u satisface la ecuación.
$$\int \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi - f\varphi\right) dx = 0 \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Demostración. Debe hacerse notar primero que la última integral es la derivada del funcional
$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega fu\, dx$$
definido en el espacio de Banach $V = H_0^{1,p}(\Omega)$. Puede demostrarse que $H_0^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo. Además J es coercitivo, en efecto,
$$\begin{aligned} J(u) &\geqslant \frac{1}{p}\|u\|^p_{H_0^{1,p}(\Omega)} - \|f\|_{H^{-1,q}}\|u\|_{H_0^{1,p}(\Omega)} \geqslant \frac{1}{p}\left(\|u\|^p_{H_0^{1,p}(\Omega)} - c\|u\|_{H_0^{1,p}(\Omega)}\right) \\ &\geqslant c^{-1}\|u\|^p_{H_0^{1,p}(\Omega)} - C. \end{aligned}$$
Finalmente, J es débilmente semicontinuo por abajo, para lo cual es suficiente demostrar que $u \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^{1,p}(\Omega)$. Tenemos,
$$\int_\Omega fu_m dx \quad \to \quad \int_\Omega fu dx,$$
dado que $f \in H^{-1,q}(\Omega)$ y la expresión de arriba es la definición de convergencia débil en tal espacio. Por lo tanto se puede aplicar el teorema 2.1.5, por lo tanto existe un mínimo $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ de J. □

Capítulo 5

Introducción a los teoremas de punto fijo

5.1. Teorema de Brouwer

Una parte importante del análisis no lineal está dedicada al estudio de problemas de punto fijo. Podemos decir que una función f tiene un punto fijo si $f(x^*) = x^*$ para algún x^* del dominio de f. El problema de punto fijo se refiere a encontrar condiciones necesarias y suficientes para que una función tenga un punto fijo. Por ejemplo, en cálculo de una variable, si $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ es continua tiene un punto fijo en $[0,1]$. La variedad de las aplicaciones relacionadas con problemas de punto fijo es ilimitada y cubre desde el análisis numérico hasta problemas de existencia de soluciones para ecuaciones diferenciales parciales. A manera de ilustración y como un mero esbozo presentamos la idea de demostración del teorema de Cauchy-Peano para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Teorema 5.1.1 (Cauchy-Peano). *Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la cual es continua en una vecindad del punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existe $\alpha > 0$ y una solución del problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad y(x_o) = y_0 \tag{5.1}$$

en el intervalo $[x_0 - \alpha, y_0 - \alpha]$. Esto es, existe una función continua $\phi : [x_0 - \alpha, y_0 - \alpha] \to \mathbb{R}$ tal que $\phi(x_0) = y_0$ y $\dfrac{d\phi}{dx} = f(x, \phi(x))$ para toda x en el intervalo.

Idea de la demostración. Dado que f es continua en una vecindad de (x_0, y_0) existen $a, b > 0$ tales que si (x, y) satisfacen $|x - x_0| \leqslant a$ y $|y - y_0| \leqslant b$ entonces f es continua en (x, y). Sea R el rectángulo

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leqslant a \text{ y } |y - y_0| \leqslant b\}.$$

Escogemos $M > 1$ tal que $M > b/a$ y además $M \geqslant |f(x,y)|$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}$. Ponemos $\alpha := b/M$. Ahora hacemos notar que el problema (5.1) puede escribirse en la forma

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{5.2}$$

Es decir, una función $\phi : [x_0 - \alpha, y_0 - \alpha] \to \mathbb{R}$ es una solución de el problema de valor inicial (5.1) si y sólo si es solución de la ecuación integral (5.2).

Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de las funciones de valores reales definidas en $[x_0 - \alpha, y_0 - \alpha]$. El conjunto $\mathcal{C}$ es un espacio vectorial respecto a $\mathbb{R}$. A continuación definimos el conjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, una función $u \in \mathcal{C}$ pertenece a $\mathcal{A}$ si tiene la siguientes propiedades:

i) $|u(x) - y_0| \leqslant b$ para todo $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.
ii) $|u(x_1) - u(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|$ para todo $x_1, x_2 \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Notamos que el conjunto $\mathcal{A}$ es un subconjunto convexo de $\mathcal{C}$, es decir, para todo $u, v \in \mathcal{A}$ y $0 \leqslant t \leqslant 1$ se tiene también $tu + (1-t)v \in \mathcal{A}$. ahora definimos una norma para $u \in \mathcal{C}$ por la fórmula

$$\|u\| = \text{máx}\{|u(x)| : x_0 - \alpha \leqslant x \leqslant x_0 + \alpha\}.$$

Naturalmente, la norma anterior define una topología en $\mathcal{C}$ por medio de la métrica

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Note que el conjunto $\mathcal{A}$ es cerrado en $\mathcal{C}$ respecto a dicha topología. Además, el Teorema 3.1.12 de Ascoli-Arzelá implica que $\mathcal{A}$ es compacto.

Definamos el operador $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ por medio de

$$Tu(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))dt.$$

Sabemos que una función $\phi : [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt$$

para toda $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ es solución de (5.2), pero el lado derecho de la ecuación integral anterior es $T\phi$ por lo tanto el para demostrar el teorema de Cauchy-Peano es suficiente demostrar que existe ϕ tal que $T\phi = \phi$, es decir que T tiene un punto fijo. Tal existencia es consecuencia del siguiente teorema.

TEOREMA 5.1.2 (Teorema del punto fijo de Schauder). *Si $\mathcal{A}$ es un subconjunto compacto y convexo de un espacio vectorial X y $T : X \to X$ es una función continua tal que $T(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$, entonces existe $\phi \in \mathcal{A}$ tal que $T\phi = \phi$.*

La parte final de estas notas estará dedicada a estudiar las ideas principales de la demostración del teorema del punto de fijo de

Schauder. Comenzamos con el teorema de punto fijo en dimensión finita, conocido como Teorema de Brouwer.

TEOREMA 5.1.3 (Teorema de Brouwer). *Sea K un conjunto no vacío, convexo y compacto de $\mathbb{R}^N$. Supóngase que $F : K \to K$ es continua. Entonces F tiene un punto fijo*

Para la demostración de este teorema primero se demuestra el caso donde K es la bola cerrada en $\mathbb{R}^N$. Seguidamente se demuestra que cualquier convexo compacto en $\mathbb{R}^N$ es homeomorfo a una bola de dimensión $M \leqslant N$. Es muy ilustrativo estudiar la demostración para $N = 1$, para luego ver porqué no se puede extender esta demostración a $\mathbb{R}^N$ con $N \geqslant 2$.
Demostración para dimensión 1. Se puede reemplazar cualquier bola de dimensión 1, vía isomorfismo, con el intervalo $I = [0, 1]$. Se desea demostrar que si $f : I \to I$ es continua entonces existe $x \in I$ tal que $f(x) = x$. Supongamos contrariamente que f no tiene punto fijo en I. Entonces $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$. Sea $g(x) := f(x) - x$ entonces g es claramente continua en I. Además $g(0) > 0$ y $g(1) < 0$, por el teorema del valor intermedio para funciones continuas existe $x^* \in I$ tal que $g(x^*) = 0$. □
Demostración para dimensión 2. Para dimensión 2 la falta de un orden apropiado en $\mathbb{R}^2$ hace imposible extender el tipo de argumento para dimensión 1. Daremos a manera de bosquejo otro tipo de argumento. Ahora consideramos la bola $\mathbf{B} := \overline{B(0; 1)}$ en $\mathbb{R}^2$, y una función continua $F : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ Supongamos que la ecuación $F(x) = x$ no tiene solución en $\mathbf{B}$. Definamos la función G por la fórmula

$$G(x) = \tau(x)F(x) + (1 - \tau(x))x$$

donde $\tau \leqslant 0$ es solución de la ecuación cuadrática

$$\|\tau F(x) + (1 - \tau)x\|^2 = 1.$$

La función G está bien definida ($F(x) \neq x$ para $x \in \mathbf{B}$) y manda $\mathbf{B}$ continuamente a la circunferencia unitaria $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$. Además

$$G(x) = x \text{ para } \|x\| = 1.$$

Intuitivamente la idea de transformar continuamente la bola unitaria en la circunferencia S^1 por G de manera sobreyectiva parece imposible sin agujerar la bola. Sin embargo este argumento intuitivo está lejos de ser trivial. Se requiere de la topología algebráica para formalizar dicho argumento. A pesar de que los argumentos de la topología algebráica están fuera de los objetivos de este curso podemos mencionar que la bola en $\mathbb{R}^2$ tiene asociado el grupo trivial $\{e\}$, mientras que la circunferencia tiene asociado el grupo $\mathbb{Z}$. Si existiese una función continua G sin puntos fijos se induciría un isomorfismo entre el grupo trivial y $\mathbb{Z}$ lo cual es absurdo. Para $N > 2$ se construyen los grupos de homología $H_N(S^N)$ para las esferas $S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ y se puede demostrar que tales grupos son homeomorfos a $\mathbb{Z}$ lo que sería contradicho por la existencia de G. A pesar de que estos argumentos están fuera del alcance de este curso es importante mencionar esta extraordinaria colaboración entre la topología y el álgebra en su máxima expresión y mencionar que una discusión completa a nivel elemental de estos temas puede verse por ejemplo en [**1**]. Para una demostración completamente analítica del teorema de Brouwer puede verse por ejemplo [**2**]. Dado que dicha demostración requiere el teorema de Stone Weierstrass no la incluiremos aquí.

Enunciamos ahora un lema topológico elemental.

LEMA 5.1.4. *Sea K convexo cerrado y acotado en $\mathbb{R}^N$ el cual contiene al menos dos puntos distintos. Entonces K es homeomorfo a la bola unitaria $\mathbf{B}^M := \overline{B(0;1)} \subset \mathbb{R}^M$ para algún $M \leqslant N$.*

Demostración. Sean $\{x_1, \ldots, x_M\}$ elementos linealmente independientes en K tales que el espacio X generado por tales vectores satisface

$$X := \text{gen}\,\{x_1, \ldots, x_M\} \supseteq K.$$

Puede demostrarse por inducción en la dimensión de X que existe $x_0 \in K$ tal que para cada $x \in X$ existe $\alpha > 0$ tal que $x_0 + 1/\alpha\, x \in K$. Supongamos por simplicidad que $x_0 = 0$ y definamos el funcional de Minkowski φ de K, es decir,

$$p(x) = \text{ínf}\left\{\alpha > 0 : \frac{1}{\alpha}x \in K\right\}, \quad \varphi(x) = p(x)\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^N}}, \quad x \in X\backslash\{0\}, \varphi(0) = 0.$$

No es difícil demostrar que φ es un homeomorfismo de K sobre $\mathbf{B}^M \cap X$. Dado que X con la norma inducida por la norma de $\mathbb{R}^N$ es isomorfo a $\mathbb{R}^M$, K es también isomorfo a $\mathbf{B}^M$. □

Se puede dar ahora una demostración del Teorema 5.1.3

Demostración del Teorema 5.1.3. Si K tiene sólo un punto el teorema es obvio. En otro caso tómese el homomorfismo Φ de $\mathbf{B}^M$ sobre K dado por el Lema 5.1.4. Suponiendo verdadero el teorema de Brouwer para bolas en $\mathbb{R}^N$ tenemos que la transformación $\Phi^{-1} \circ F \circ \Phi : \mathbf{B}^M \to \mathbf{B}^M$ tiene un punto fijo $x^* \in \mathbf{B}$. Por lo tanto

$$F(\Phi(x^*)) = \Phi(x^*) \in K. \qquad \square$$

El teorema de Brouwer es en sí mismo importante y ha sido utilizado, por ejemplo, en álgebra lineal para demostrar la existencia de valores propios positivos para matrices con entradas no negativas (cf. [**2**]) además puede usarse para demostrar la existencia de soluciones periódicas para problemas de valor inicial (ejemplo 5.1.5 op.cit) Sin embargo el teorema de punto fijo de Brouwer no se cumple en dimensión infinita como lo demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo (Kakutani). Sea H un espacio de Hilbert separable con una base ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sea $A \in \mathcal{L}(H)$ el operador desplazamiento a la derecha dado por

$$Ae_n = e_{n+1}, \quad i.e., \quad A\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_{n+1},$$

y

$$F(x) = (1 - \|x\|^2)^{1/2} e_1 + Ax.$$

Entonces F es continuo y

$$\|F(x)\|^2 = 1 - \|x\|^2 + \|Ax\|^2 = 1 \text{ para } \|x\| \leqslant 1.$$

Si $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ es un punto fijo de F entonces

$$x_n = x_{n+1} \quad \text{y} \quad x_1 = (1 - \|x\|^2)^{1/2}.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ con $x_n = x_{n+1}$, es convergente si y sólo si $x_n = 0$ para toda n, es decir, $\|x\| = 0$. Por lo tanto $x_1 = 1$ lo cual es una contradicción.

Nota. Debe observarse que en ejemplo anterior el aparentemente simple operador A es perturbado por un operador no lineal de rango unidimensional. Los operadores continuos de rango finito forman una subclase especial de operadores no lineales compactos.

DEFINICIÓN 5.1.5. Sean X, Y espacios vectoriales normados y sea $M \subset X$. Un Operador $F : M \to Y$ se llama operador compacto de M sobre Y si F es continuo en M (M como espacio métrico con la métrica inducida por la norma de X) y $F(M \cap K)$ es relativamente compacto para cada conjunto acotado $K \subset X$. El conjunto de todos los operadores compactos en M se denota por $\mathcal{C}(M, Y)$. Si el rango de $F \in \mathcal{C}(M, Y)$ es un subconjunto de dimensión finita de Y, se dice que F es de rango finito y se escribe $F \in \mathcal{C}_f(M, Y)$.

El interés principal en los operadores compactos está en que tales operadores están cercanos a los finitos. La formulación exacta de esté aserto se presenta a continuación.

TEOREMA 5.1.6. *Sea X un espacio vectorial normado, Y un espacio de Banach y sea M un subconjunto acotado de X.*

i) *Si $F \in \mathcal{C}(M, Y)$, entonces existe una sucesión $\{F_n\} \subset \mathcal{C}_f(M, Y)$ la cual converge a F uniformemente en M.*
ii) *Si $\{F_n\} \subset \mathcal{C}(M, Y)$ y $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ uniformemente para $x \in M$ entonces $F \in \mathcal{C}(M, Y)$*

Demostración. i) Dado que $\overline{F(M)}$ es compacto, existe una $1/n$-red finita $y_1, \dots, y_m$ de $F(M)$. Las funciones $\varphi_k(x) := \text{máx}\{0, 1/n - \|F(x) - y_k\|\}$ son continuas en M y $\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x) > 0$ para toda $x \in M$. Por lo tanto las funciones

$$\mu_k := \frac{\varphi_k(x)}{\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x)}, \quad k = 1, \dots, m,$$

forman una partición de la unidad en M. Póngase $F_n(x) = \sum_{k=1}^{m} \mu_k(x) y_k$, $x \in M$. Entonces $F_n \in \mathcal{C}_f(M, Y)$ y

$$\|F(x) - F_n(x)\| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \mu_k(x) \|F(x) - y_k\| < \frac{1}{n} \quad \text{para toda } x \in M.$$

ii) Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x \in M} \|F(x) - F_n(x)\| < \varepsilon$$

y $y_1, \dots, y_k$ es una ε-red para $F_n(M)$. Entonces también es una 2ε-red para $F(M)$. Dado que Y es un espacio de Banach se sigue que $\overline{F(M)}$ es compacto. □

Finalmente podemos demostrar el Teorema de Shauder.

Teorema 5.1.7 (Teorema de punto fijo de Schauder.). *Sea K un conjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de un espacio vectorial normado X. Supóngase que $F \in \mathcal{C}(K, X)$ y $F(K) \subset K$. Entonces F tiene un punto fijo en K.*

Demostración. Sea $\{F_n\}$ la sucesión construida en la demostración del Teorema 5.1.6. Denótese

$$X_n := \text{gen}\,\{y_1, \dots, y_m\}.$$

Dado que $y_1, \dots, y_m \in F(K)$ y K es convexo, tenemos

$$F_n(K) \subset K \cap X_n.$$

La restricción de F_n a $K \cap X_n$ tal que

$$F_n(x_n) = x_n.$$

Por la compacidad de F existe una subsucesión $\{F(x_{n_k})\}$ la cual converge a una $x \in \overline{F(K)} \subset \overline{K} = K$. La estimación

$$\|F(x_{n_k}) - x_{n_k}\| = \|F(x_{n_k}) - F_{n_k}(x_{n_k})\| < \frac{1}{n_k}$$

implica también que $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x$. Dado que F es continua, concluimos que

$$\lim_{k \to \infty} F(x_{n_k}) = F(x) \quad \text{y} \quad F(x) = x. \quad \square$$

Finalmente, con el Teorema de Schauder también se puede demostrar la existencia de soluciones para ecuaciones de segundo orden

$$\ddot{x}(t) = f(t, x(t))$$

con las condiciones de frontera de Dirichlet

$$x(0) = x(1) = 0,$$

donde f es una función continua en $[0,1] \times \mathbb{R}$, via funciones de Green (ver por ejemplo [**2**].)

Bibliografía

[1] ARMSTRONG M. A., Basic topology *Springer 1983.*

[2] DRABEK P., MILOTA J., Methods of Nonlinear Analysis *Birkhäuser 2007.*

[3] DUGUNDJI, J. Topology, *Brown Pub.,*Dubuque, IA, 1989.

[4] GOLDSTINE, A history of the calculus of variations from the 17^{th} trough the 19^{th} Century, *Studies Hist. Math. Phys. Sci.* 5. Springer, New York- Heidelberg-Berlin.

[5] STRUWE M., Variational Methods, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 1990.